SÉMINAIRE DE GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE
DU BOIS-MARIE
1967 - 1969

GROUPES DE MONODROMIE
EN GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE
(SGA 7 I)

Dirigé par
A. GROTHENDIECK
avec la collaboration de
M. RAYNAUD *et* D.S. RIM

INTRODUCTION

Soient S un schéma et $f : X \longrightarrow S$ un morphisme de schémas. Si f est propre et lisse, et que le nombre premier ℓ est inversible sur S, les groupes de cohomologie ℓ-adique $\mathrm{H}^i(X_{\overline{s}}, \mathbf{Z}_\ell)$ des fibres géométriques de f forent un système local ℓ-adique sur S. Pour f seulement supposé propre, ces groupes sont les fibres d'un faisceau ℓ-adique $\mathrm{R}^i f_* \mathbf{Z}_\ell$ sur S. La *théorie des cycles évanescents* met en relation la ramification de ce faisceau sur S et les singularités de f.

Nous ne considérerons que le cas où S est un trait hensélien (= spectre d'un anneau de valuation discrète hensélien). C'est en pratique le cas essentiel. Je renvoie à (I 2.1) pour une description heuristique de la théorie. Soient $S = \mathrm{Spec}(V)$, $k(\overline{\eta})$ une clôture algébrique du corps des fractions $k(\eta)$ de V et $k(\overline{s})$ la clôture algébrique correspondante du corps résiduel $k(s)$ ($k(\overline{s})$ est le corps résiduel du normalisé $\overline{V}$ de V dans $k(\overline{\eta})$). Dans le cas particulier où X est propre et plat sur S, de dimension relative n, et où f ne présente qu'un point de non lissité $x \in X_S$, on définit des $Gal(\overline{\eta}/\eta)$-modules φ^i, de nature purement locale au voisinage de x, nuls pour $i \notin [0, n]$ (I 4.2), et on construit une suite exacte longue de $Gal(\overline{\eta}/\eta)$-modules

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{H}^i(X_{\overline{s}}, \mathbf{Z}_\ell) \xrightarrow{sp} \mathrm{H}^i(X_{\overline{\eta}}, \mathbf{Z}_\ell) \longrightarrow \varphi^i \longrightarrow \mathrm{H}^{i+1}(X_s, \mathbf{Z}_\ell) \longrightarrow \ldots$$

(le $Gal(\overline{s}, s)$-module $\mathrm{H}^i(X_{\overline{s}}, \mathbf{Z}_\ell)$ est regardé comme un $Gal(\overline{\eta}/\eta)$-module avec action triviale de l'inertie ; sp est la flèche de spécialisation).

On donne aussi des critères, valables pour l'instant seulement en caractéristique 0, pour que les φ^i pour i petits soient nuls (par exemple, si X est de plus localement d'intersection complète, $\varphi^i = 0$ pour $i \neq n$ (I. 4.5)).

Le *théorème de monodromie* affirme que l'action du sous-groupe d'inertie I de $\mathrm{Gal}(\overline{\eta}/\eta)$

est quasi-unipotente : pour $T \in I$, il existe des entiers $N > 0$, $M > 0$ tels que l'endomorphisme $(T^M - I)^N$ de $\mathrm{H}^i(X_{\overline{\eta}}, \mathbf{Z}_\ell)$ soit nul. On donne de ce théorème deux démonstrations. La première (I.1.2), de nature arithmétique, s'applique dès que les groupes de cohomologie considérés ont des propriétés de finitude raisonnables. Le point clef est que, lorsque $k(s)$ est de type fini sur son sous-corps premier, l'action de I est quasi-unipotente pour *toute* représentation ℓ-adique de $\mathrm{Gal}(\overline{\eta}/\eta)$. La seconde démonstration, plus géométrique, requiert la pureté et la résolution des singularités : elle n'est pour l'instant valable qu'en caractéristique 0 ou pour un H^1. Elle apporte de précieuses informations sur l'exposant de nilpotence $N(N \leq i+1$ pour un $\mathrm{H}^i)$. Ainsi qu'on le verra ultérieurement, elle se prête bien, sur $\mathbf{C}$, à la comparaison avec la théorie transcendante.

Ces résultats, appliqués au H^1 des variétés abéliennes, i.e. à leur module de Tate, permettent d'étudier la réduction $mod\, p$ de celles-ci. On donne ainsi deux démonstrations du théorème de réduction stable des variétés abéliennes selon lequel, après ramification, la fibre spéciale connexe du modèle de Néron est extension d'une variété abélienne par un tore. La première (I. 6) reprend la méthode de la démonstration arithmétique du théorème de monodromie. La seconde (IX 3.6) s'appuie sur une analyse beaucoup plus fine du modèle de Néron, et des ses propriétés de polarisation.

Les exposés I à V de Grothendieck n'ont pas été rédigés. Ils ont été résumés dans un exposé I. Les résultats énoncés y sont démontrés de façon succinte, mais essentiellement complète.

L'exposé II applique la méthode des pinceaux de Lefschetz et (I 5.3) à l'étude du groupe fondamental. Pour S une surface sur un corps algébriquement clos k, d'exposant caractéristique p, on montre que le groupe profini $\pi_1^{(p)}(S,s)$, complété en dehors de p du groupe fondamental, est de pro-(p)-présentation finie.

Comme expliqué plus haut, les exposés III à V n'existent pas.

L'exposé VI contient, avec quelques compléments, la théorie des déformations de Schlessinger. On y prend soin de tenir compte des automorphismes infinitésimaux des objets qu'on classifie, et de ne pas passer trop brutalement au foncteur des classes d'isomorphie d'objets. On y donne aussi une nouvelle construction des $\underline{\mathrm{Ext}}^i(L_{X/S}, -)$ ($L_{X/S}$ complexe cotangent relatif de X/S). Cet exposé sert dans le reste du séminaire surtout via l'étude qui y est faite des déformations des singularités quadratiques ordinaires.

Les exposés VII et VIII sont consacrés à la théorie des biextensions. Cette théorie joue un rôle essentiel dans l'exposé IX, pour exprimer ce qu'il advient d'une polarisation quand on passe d'une variété abélienne à un modèle de Néron de celle-ci. Cet exposé IX contient la démonstration du théorème de réduction stable des variétés abéliennes, et diverses applications.

La suite de ce séminaire : SGA 7 II, par P. Deligne et N. Katz, paraîtra ultérieurement.

Bures sur Yvette, mai 1972,
P. DELIGNE

TABLE DE MATIÈRES

§ I. — RÉSUMÉ DES PREMIERS EXPOSÉS DE A. GROTHENDIECK RÉDIGÉ PAR P. DELIGNE

§ II. — PROPRIÉTÉS DE FINITUDE DU GROUPE FONDAMENTAL
PAR MICHÈLE RAYNAUD

§ VI. — FORMAL DEFORMATION THEORY
BY D. S. RIM

1. Formal existence theorem

We recall the notion of cofibered category (SGA 1 [VI]).

Let C be a fixed category. A cofibered category A over C is, by definition, a category A together with a functor $P : A \longrightarrow C$ such that

Ax.1 For any map f in C and any object a in A with $P(a) =$ the source of f, there exists an f-morphism $\alpha : a \longrightarrow b$ which is cocartesian (i.e. for any f-morphism $\alpha' : a \longrightarrow b'$ there exists a unique T-morphism $\tau : b \longrightarrow b'$ in A such that $\alpha' = \tau \circ \alpha$ where $T =$ the target of f).

Ax.2 A composite of cocartesian morphism in A is again cocartesian.

The following properties of a cofibered category $P : A \longrightarrow C$ follow immediately from the definitions:

(Cancellation) Let []

(Factorisation) Given cocartesian maps $a \xrightarrow{\alpha} a'$, $a \xrightarrow{\alpha} a''$, there exists a cocartesian map $a' \xrightarrow{\gamma} a''$ such that $\gamma\alpha = \beta$ if and only if there exists $f : P(a') \longrightarrow P(a'')$ in C sch that []

Let A be a cofibered category over C. For each object S in C we denote by $A(S)$ the subcategory of A whose objects are the objects a in A such that

§ VII. — BIEXTENSIONS DE FAISCEAUX DE GROUPES

PAR A. GROTHENDIECK

§ VIII. — COMPLÉMENTS SUR LES BIEXTENSIONS. PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES BIEXTENSIONS DES SCHÉMAS EN GROUPES PAR A. GROTHENDIECK

§ IX. — MODÈLES DE NÉRON ET MONODROMIE
PAR A. GROTHENDIECK

SOMMAIRE

0. Introduction

0.1. Dans le présent exposé, nous appliquons les résultats des exposés précédents à l'étude du *modèle de Néron* (1.1) A d'un schéma abélien A_K défini sur le corps des fonctions K du trait hensélien S. Nous verrons en effet que les propriétés les plus importantes du modèle de Néron peuvent s'interpréter en termes de l'action du groupe de monodromie locale I sur le module de Tate $T_\ell(A_K(\overline{K}))$ (où ℓ est un nombre premier $\neq p$). Comme le dual de ce dernier s'interprète comme le groupe de cohomologie ℓ-adique $\mathrm{H}^1(A_{\overline{K}}, \mathbf{Z}_\ell)$, et que pour tout schéma projectif et lisse X sur K, $\mathrm{H}^1(X_{\overline{K}}, \mathbf{Z}_\ell)$ s'identifie à $\mathrm{H}^1(A_{\overline{K}}, \mathbf{Z}_\ell)$, où $A_{\overline{K}}$ est la variété d'Albanese de $X_{\overline{K}}$, on voit donc que le présent exposé peut aussi être considéré comme une étude détaillée des *phénomènes de monodromie locale pour les* H^1 *ℓ-adiques* (ou mieux encore, pour les H^1 "motiviques") *des variétés projectives et lisses sur* K. Dans cette optique, il semble clair que les principaux résultats du présent exposé sont destinés à être englobés dans une "théorie de Néron" pour des motifs de poids quelconque, i.e. pour des H^i (ℓ-adiques, ou de De Rham, ou de Hodge etc) avec i quelconque, qu'on ne commence qu'à entrevoir à l'heure actuelle. (Cf. à se sujet [?], et plus particulièrement les conjectures de DELIGNE 9.8 à 9.13 du report cité.)

0.2. Le résultat le plus important du présent exposé est le *"théorème de réduction semi-stable"*

3.6, affirmant qu'après extension séparable finie K' de K, le modèle de Néron de $A_{K'}$ a une fibre spéciale dont la composante neutre est extension d'un schéma abélien par un tore.

0.3.

0.4.

0.5.

LEITFADEN

1. Modèle de Néron des schémas abéliens : notations ; l'accouplement canonique $\Phi_\circ \times \Phi'_\circ \longrightarrow (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})_K$, et la biextension canonique W° de (A°, A'°)

1.0. Dans toute la suite du présent exposé

1.1. Rappelons qu'il existe sur S

1.2.

2. Partie fixe et partie torique de $T_\ell(A_K)$. Critères de bonne réduction. Théorème d'orthogonalité pour $\ell \neq p$

14. Liens avec la théorie transcendante : cas rigide-analytique. L'homomorphisme canonique $\underline{M}_K \longrightarrow A[\,]$