SÉMINAIRE DE GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE
DU BOIS-MARIE
1966 - 1967

THÉORIE DES INTERSECTIONS ET THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH
(SGA 6)

Un Séminaire dirigé par
P. BERTHELOT, A. GROTHENDIECK, L. ILLUSIE
avec la collaboration de
D. FERRAND, J.P. JOUANOLOU, O. JUSSILA,
S. KLEIMAN, M. RAYNAUD, J.P. SERRE

PREFACE

La présente édition du Séminaire de Géométrie Algébrique 6 reproduit à peu de chose près la première édition, distribuée par l'I.H.E.S. sous forme d'exposés multigraphiés. Les corrections effectuées portent essentiellement sur des fautes d'impression, sauf dans les exposés I et III, où de légères modifications ont été apportées par L. Illusie à quelques énoncés incorrects dans la version primitive. D'autre part, des notes ont été rajoutées en bas de page, en particulier dans l'exposé XIV par A. Grothendieck, afin de signaler des progrès récents dans des questions encore ouvertes lors du Séminaire. Signalons enfin que l'exposé XI, de D. Ferrand, concernant la théorie du déterminant pour les complexes parfaits, n'a pas été régigé, et ne sera donc pas publié ; pour éviter des erreurs de référence, nous avons gardé telle quelle la numération des exposés suivantes.

Juin 1971

INTRODUCTION

Le but du présent Séminaire est de développer une théorie *globale* des intersections, et une formule de Riemann-Roch, pour des schémas quelconques. Le lecteur trouvera une description du programme du Séminaire dans l'exposé 0. La possibilité en principe d'une démonstration d'une formule de Riemann-Roch pour les schémas *réguliers* généraux, suivant les lignes du rapport bien connu de Borel-Serre en 1958, était claire dès ce moment, du moins pour un morphisme projectif. L'extension au cas général est moins évidente ; le programme dans lequel elle s'insère (et partiellement réalisé dans notre séminaire) remonte à 1960. Comme c'était également le cas pour la théorie de dualité des faisceaux cohérents (cf. R. Hartshorne, Residues and Duality, Lecture Notes in Mathematics n°20, Springer), un outil essentiel pour formuler une théorie satisfaisante est la théorie des *catégories dérivées* de Verdier, dont la connaissance est indispensable pour la compréhension du Séminaire.

A part cette théorie, l'étude du Séminaire n'exige guère qu'une connaissance générale des fondements de la Géométrie Algébrique, tels qu'ils sont exposés dans EGA, chapitres I, II, III ; nous n'aurons en plus que des références occasionnelles à faire à EGA IV, pour certains faits concernant les morphismes plats ou lisses, qui pour l'essentiel figurent également dans les premiers exposés de SGA 1. Enfin, pour développer certains résultats avec toute la généralité souhaitable pour les applications, nous faisons usage parfois de la notion de *site annelé* et de *topos annelé*, pour laquelle nous renvoyons à SGA 4, exposés I à IV. Le lecteur qui ignorerait le langage des sites et topos pourra remplacer partout lesdits objets par des espaces topologiques ordinaires, les objets du topos étant alors remplacés par des ouverts de ces espaces; mais nous lui conseillons néanmoins, de préférence, de s'assimiler le langage des topos, qui fournit un principe d'unification extrêment commode.

La notion fondamentale pour la théorie présentée ici est celle de *complexe de Modules parfait*, et ses diverses variantes, développées dans les exposés I, II, III. Il semble clair que ces notions, importantes également dans d'autres contextes en Géométrie Algébrique (notamment pour les formules de type Lefschetz-Verdier en cohomologie à coefficients discrets (SGA 5) ou cohérents), auront aussi leur rôle à jouer en dehors de la Géométrie Algébrique, notamment pour la formulation d'une variante analytique complexe du théorème de Riemann-Roch présenté ici, ou de variantes convenables du théorème de l'index d'Atiyah-Singer. Quelques indications dans ce sens seront données dans Exp. II. Malheureusement, il manque encore à l'heure actuelle un énoncé, même heuristique, qui engloberait ces deux théorèmes (dont le premier pour l'instant reste conjectural). Il manque apparement une idée nouvelle, comme il en manque aussi en Géométrie Algébrique pour parvenir à une démonstration du théorème de Riemann-Roch en dehors d'hypothèses projectives (cf. Exp. XIV, n°2).

Nous n'aurons à faire nul usage dans ce séminaire de la *théorie locale* des intersections, exposée dans J. P. Serre, Algèbre Locale. Multiplicités (Lecture Notes in Mathematics *n*° 11, Springer), et nous contenterons simplement de signaler ici que ce cours de Serre a eu une influence évidente sur la genèse de la théorie en 1957. Nous n'utiliserons pas non plus la théorie de *l'anneau de Chow* développée dans Séminaire Chevalley 1958, exposés 2 et 3 (École Normale Supérieure). Cette théorie est liée de façon essentielle à des hypothèses de non singularité, alors que le but de notre séminaire est au contraire de développer une théorie des intersections sur les schémas généraux (et même les topos localement annelés généraux) voir à ce sujet les commentaires dans Exp. XIV *n*° 4 et *n*° 8, donnant les relations entre notre théorie et celle de l'anneau de Chow, et posant la question d'une généralisation de cette dernière. Nous pouvons dire que le Séminaire présente une théorie des intersections cohérente et se suffisant à elle même, mais nullement exhaustive des différents points de vue utiles (voire indispensables) en théorie des intersections, et qu'il convient par suite de le compléter par le compléter par les exposés cites de Serre et de Chevalley.

Nous avons joint au Séminaire (en Appendice à Exp. 0) le rapport Grothendieck de 1957 "classes de Faisceaux et théorème de Riemann-Roch", qui avait servi de base au séminaire de Borel et Serre à Princeton la même année, ainsi qu'à leur article déjà cité. Ce rapport esquisse deux démonstrations de théorème de Riemann-Roch pour les variétés quasi-projectives non singulières, dont la première, valable pour le moment seulement en caractéristique nulle, mais donnant en revanche un résultat un peu plus précis dans le cas d'une immersion, ne figure pas encore dans la littérature (sans exclure le travail de Borel-Serre ni le présent séminaire). La lecture de ce rapport ne présuppose bien entendu celle d'aucun autre exposé du Séminaire, et peut même servir d'introduction à l'étude de ce dernier au même titre que l'exposé 0, surtout pour un lecteur qui ne serait pas encore familier avec Borel-Serre. La démonstration à laquelle nous venons de faire allusion s'applique essentiellement telle quelle au cas d'un morphisme projectif d'espaces analytiques complexes, et s'appliquera sans doute également en caractéristique quelconque, une fois résolu le problème des opérations "puissances extérieures" dans la catégorie dérivée (cf. Exp. XIV, n° 1, 2, 3). C'est l'absence d'une étude de cette question qui constitue sans doute la lacune la plus sérieuse dans ce Séminaire, dans l'optique même où nous nous y sommes placés.

On remarquera l'absence, dans la table de matières du présent Séminaire, de deux des participants mentionnés sur la page de garde. L'un, J. P. Jouanolou, avait pris une part active à l'élaboration technique de la première partie de Séminaire, mais avait été empêché de prendre part aux exposés oraux ; on lui doit notamment l'assertion d'indépendance linéaire contenue dans l'important énoncé VI 1.1 donnant la structure de l'anneau $K^\bullet$ des classes de Modules localement libres sur un fibré projectif (qui n'était prouvé auparavant que lorsqu'on supposait que le schéma de base admet un Module inversible ample). L'autre, J. P. Serre, avait fait deux exposés oraux, logiquement indépendants du reste du Séminaire, et qu'il a par suite préféré publier sous forme d'article séparé (cf. J. P. Serre, Groupes de Grothendieck des schémas en groupes réductifs déployés à paraître dans Publications Mathématiques, *n*° 34).

Comme dans les autres parties du Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie, les sigles SGA 1 à SGA 6 renvoient aux différentes parties dudit Séminaire, le chiffre romain suivant ce sigle indiquant le n° de l'exposé, et les chiffres arabes qui le suivent correspondant à la numérotation intérieure de l'exposé en question; pour les références intérieures au présente Séminaire, on omet le sigle SGA 6, en utilisant des références style I 4.9 (signifiant: exposé I, énoncé 4.9). Le sigle EGA réfère aux Éléments de Géométrie Algébrique de J. Dieudonné et A. Grothendieck.

TABLE DE MATIÈRES

§ 0. — ESQUISSE D'UN PROGRAMME POUR UNE THÉORIE DES INTERSECTIONS SUR LES SCHÉMAS GÉNÉRAUX

PAR A. GROTHENDIECK

§ I. — GÉNÉRALITÉS SUR LES COINS DE FINITUDE DANS LES CATÉGORIES DÉRIVÉES

PAR L. ILLUSIE

§ II. — EXISTENCE DE RÉSOLUTIONS GLOBALES

PAR L. ILLUSIE

§ III. — CONDITIONS DE FINITUDE RELATIVES

PAR L. ILLUSIE

§ IV. — GROUPES DE GROTHENDIECK DES TOPOS ANNELÉS PAR L. ILLUSIE

§ V. — GÉNÉRALITÉS SUR LES λ-ANNEAUX
PAR P. BERTHELOT

§ VI. — LE $K^\bullet$ D'UN FIBRE PROJECTIF: CALCULS ET CONSÉQUENCES

PAR P. BERTHELOT

§ VII. — IMMERSIONS RÉGULIÈRES ET CALCUL DU $K^{\bullet}$ D'UN SCHÉMA ECLATÉ

PAR P. BERTHELOT

§ VIII. — LE THÉORÈME DE RIEMANN-ROCH
PAR P. BERTHELOT

§ IX. — QUELQUES CALCULS DE GROUPES K
PAR P. BERTHELOT

§ X. — FORMALISME DES INTERSECTIONS SUR LES SCHÉMAS ALGÉBRIQUES PROPRES

PAR O. JUSSILA

§ XI. — NON RÉDIGÉ

§ XII. — UN THÉORÈME DE REPRÉSENTABILITÉ RELATIVE SUR LE FONCTEUR DE PICARD
PAR M. RAYNAUD (RÉDIGÉ PAR S. KLEIMAN)

§ XIII. — LES THÉORÈMES DE FINITUDE POUR LE FONCTEUR DE PICARD

PAR S. KLEIMAN

§ XIV. — PROBLÈMES OUVERTS EN THÉORIE DES INTERSECTIONS

PAR A. GROTHENDIECK

INDEX TERMINOLOGIQUE

INDEX DES NOTATIONS